www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ECOLE CENTRALE PARIS
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'Admission 1990

MATHEMATIQUES II

M (P') -differences signalées-

L'espace E (affine, euclidien, orienté, de dimension 3) est rapporté à un repère orthonormal direct $R_0 = (O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d'axes Ox, Oy, Oz. On appelle S la sphère de centre O et de rayon l'unité, C le cône engendré par les droites passant par O et faisant avec Oz l'angle $\frac{\pi}{6}$.

On se propose d'étudier quelques propriétés de l'ensemble des droites tangentes à S et situées dans un plan tangent à C (on dira qu'une droite D est tangente à une surface s'il existe sur D un point M qui soit point régulier de la surface et tel que le plan tangent en M contienne D) .

Pour tout couple (t, θ) de réels, on pose :

$$\vec{u}(t) = \cos t\,\vec{i} + \sin t\,\vec{j}$$
$$\vec{v}(t) = -\sin t\,\vec{i} + \cos t\,\vec{j}$$
$$\vec{k}_1(t) = \frac{1}{2}\vec{v}(t) + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}$$

$$A(t,\theta) = O + \cos\theta\,\vec{u}(t) + \sin\theta\,\vec{k}_1(t)$$

$$\vec{w}(t,\theta) = \vec{A}'_\theta(t,\theta) = -\sin\theta\,\vec{u}(t) + \cos\theta\,\vec{k}_1(t)$$

et l'on désigne par $D_{t,\theta}$ la droite passant par le point A(t, θ) et de vecteur unitaire $\vec{w}(t, \theta)$. On note (Δ) l'ensemble des droites $D_{t,\theta}$, où (t, θ) décrit $\mathbb{R}^2$.

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, on note $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{k}_1$, $\vec{w}$, A, D pour $\vec{u}(t)$, $\vec{v}(t)$, $\vec{k}_1(t)$, $\vec{w}(t, \theta)$, $A(t,\theta)$, $D_{t,\theta}$.

PREMIERE PARTIE

I.1. Donner une équation cartésienne dans R_0 de S ; établir que C est représenté dans R_0 par l'équation $z^2 = 3(x^2 + y^2)$. Déterminer l'intersection Γ de ces deux surfaces : nature, éléments remarquables.

I.2. Dans cette question, t garde une valeur fixée.

a) Montrer que, lorsque θ varie, $D_{t,\theta}$ reste dans un plan fixe Π_t que l'on définira par un point et deux vecteurs.

b) Soit γ_t le cercle intersection de Π_t et S . Préciser son centre, son rayon, son intersection avec Γ. Lorsque θ varie, quelle est la courbe décrite par $A(t,\theta)$ et quelle est l'enveloppe de $D_{t,\theta}$? Représenter sur une figure dans le plan Π_t le cercle γ_t, un point A et la droite D correspondante. Interpréter géométriquement le paramètre θ .

c) Donner une équation de Π_t dans R_0 .

I.3.a) Montrer que Π_t est tangent à C le long d'une génératrice de C que l'on précisera.

b) Montrer qu'inversement tout plan tangent à C est un plan Π_t pour une valeur convenable de t .

c) Soit t et t' deux réels. Quand a-t-on $\Pi_{t'} = \Pi_t$?

d) Une droite D appartenant à (Δ) peut-elle être située dans deux plans tangents à C distincts ?

I.4. On fixera ici t et θ .

a) Montrer que $D_{t,\theta}$ est tangente en A à S et que, si θ est non nul modulo π, elle est aussi tangente à C en un point B (t, θ), situé sur la droite $(O ; \vec{k}_1)$, dont on précisera la position.

b) Donner le plan tangent en A à S et, si B existe, le plan tangent en B à C. Quel angle font-ils ?

I.5. Faire un croquis perspectif représentant S, C, leur intersection Γ et, pour un choix de t et θ (θ non nul modulo π), le cercle γ_t, la droite $D_{t,\theta}$, les points A et B, les droites issues de O et dirigées respectivement par $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{k}_1$.

.../... Tourner la page

I.6. On reprend ici la notation (Δ) définie dans le préambule.

a) Montrer que toute droite appartenant à (Δ) est tangente à S et située dans un plan tangent à C .

b) Montrer qu'inversement toute droite tangente à S et située dans un plan tangent à C appartient à (Δ) .

DEUXIEME PARTIE

II.1. Dans cette question, on se propose d'étudier les isométries f de E qui transforment en elle-même $\Gamma = S \cap C$, c'est-à-dire telles que $f(\Gamma) = \Gamma$. Ces isométries forment manifestement un sous-groupe G du groupe des isométries de E, ce que l'on ne demande pas de vérifier.

a) Montrer qu'une isométrie f appartient à G si et seulement si elle laisse O invariant et laisse la droite Oz globalement invariante.

b) Montrer qu'une isométrie f appartient à G si et seulement si $f(S) = S$ et $f(C) = C$.

c) Toute isométrie f de E conservant O est définie dans le repère R_0 par une matrice J_f d'ordre 3. Quelle doit être la forme de J_f pour que f appartienne à G ? Donner pour chacune des matrices J_f trouvées une définition géométrique de f .

d) Quelles sont les réflexions appartenant à G ?
Montrer qu'elles engendrent G .

II.2. Soit f un élément du groupe G défini ci-dessus. Etablir que, si une droite d appartient à (Δ), f(d) appartient aussi à (Δ) .

II.3. Soit t, t', θ, θ' des réels.

a) A quelle condition a-t-on $D_{t,\theta} = D_{t',\theta'}$?

b) Donner une isométrie de E qui transforme, pour tout t et tout θ, $D_{t,\theta}$ en $D_{t,\theta+\pi}$.

c) Etablir que l'on passe de $D_{t,\theta}$ à $D_{t',\theta}$ par une rotation autour de $(O; \vec{k})$, dont on précisera l'angle.

d) Donner de même une isométrie de E, ne dépendant que de t et t', qui fasse passer de $D_{t,\theta}$ à $D_{t',\pi-\theta}$. On pourra commencer par le cas où $t' = t$.

TROISIEME PARTIE

On suppose, dans cette partie, que t décrit un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$. Une application Ψ de classe C^1 de I dans $\mathbb{R}$ étant donnée, on notera Σ_Ψ la surface engendrée par $D_{t,\Psi(t)}$ lorsque t décrit I, par L_Ψ et Λ_Ψ les courbes décrites par les points A et B correspondants.

III.1. **a)** Montrer que Σ_Ψ peut être définie par le paramétrage suivant : à tout t appartenant à I et à tout ρ réel on associe le point $M(t, \rho)$ défini par $M(t, \rho) = A(t, \Psi(t)) + \rho \vec{w}(t, \Psi(t))$

b) t étant donné, pour quelle valeur de ρ obtient-on le point B (lorsqu'il existe) ?

c) t étant donné, à quelle condition le point A est-il un point régulier de Σ_Ψ ? Montrer qu'alors S et Σ_Ψ sont tangentes en A .

d) t étant donné, à quelle condition le point B est-il un point régulier de Σ_Ψ ? Montrer qu'alors C et Σ_Ψ sont tangentes en B .

III.2. On suppose dans cette seule question que $I = \mathbb{R}$ et que la fonction Ψ est constante : $\Psi(t) = \mu$ pour tout t . La surface Σ_Ψ correspondante sera ici notée Σ_μ .

a) Etablir que Σ_μ est une surface de révolution d'axe Oz .

b) déterminer $\Sigma_{\pi/2}$ et $\Sigma_{-\pi/2}$.

c) Donner l'équation de Σ_0 dans le repère R_0 et préciser sa nature.

d) Quelle est la surface décrite par les droites $D_{t,\theta}$ telles que le point $B(t,\theta)$ n'existe pas ?

III.3. On désigne toujours par Ψ une application de classe C^1 d'un intervalle ouvert I dans $\mathbb{R}$. On considère l'ensemble Ω des fonctions Ψ vérifiant la propriété suivante : pour tout t appartenant à I, le point B existe et la droite $D_{t,\Psi(t)}$ est tangente en B à la courbe Λ_Ψ décrite par B .

a) Soit Ψ appartenant à Ω . Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle I de définition de Ψ, l'on a : $(2\Psi'(t) + 1)\cos\Psi(t) = 0$.

Tournez la page S.V.P.

M Seul

b) On suppose encore que Ψ appartient à Ω et que de plus, il existe t_0 appartenant à I tel que $\Psi'(t_0) \neq -\frac{1}{2}$. Etablir qu'il existe ε strictement positif tel que, pour tout t vérifiant $|t - t_0| < \varepsilon$, l'on ait $\cos \Psi(t) = 0$. En déduire que $\Psi'(t_0) = 0$.

c) Démontrer que, pour tout Ψ appartenant à Ω, Ψ' est constante dans I.

d) Donner toutes les fonctions Ψ appartenant à Ω.

(P': III 3 b :)

III.4.a) Etablir que l'application Ψ_0 qui à tout t appartenant à] 0, 2π [associe $-\frac{t}{2}$ est un élément de Ω.

M Seul

b) Montrer que, si l'on excepte certains cas singuliers (indiquer ce qu'est alors la surface Σ_Ψ), toute surface Σ_Ψ telle que Ψ soit élément de Ω se déduit de la surface Σ_{Ψ_0} ou d'une partie de cette surface par une isométrie que l'on précisera.

Dans toute la suite de la partie III, on étudie la surface Σ_{Ψ_0} qu'on vient de définir. Au lieu de Σ_{Ψ_0}, $D_{t,\Psi_0(t)}$, $A(t,\Psi_0(t))$, $B(t, \Psi_0(t))$, $\vec{w}(t,\Psi_0(t))$, on notera Σ, D_t, $A(t)$, $B(t)$, $\vec{w}(t)$; les courbes décrites par A(t) et B(t) seront notées L et Λ.

(P': III 4 :)

III.5.a) Donner les coordonnées cartésiennes de A(t) dans le repère $R_t = (O ; \vec{u}(t), \vec{v}(t), \vec{k})$ et dans le repère R_0.

b) Etablir que lorsque A(t) est un point régulier de L, la tangente à L en ce point est orthogonale à Π_t. Que dire de l'angle de cette droite avec Oz ?

c) Montrer que L a un point non régulier unique ; le donner ainsi que sa tangente.

d) Tracer sommairement les projections de L, S et $S \cap C$ sur les 3 plans de coordonnées de R_0 ; faire un croquis perspectif représentant S, L et $S \cap C$.

e) Soit t tel que A(t) soit point régulier de L. Déterminer le vecteur unitaire $\vec{N}_t$ de la normale principale et le rayon de courbure R_t de L en A(t). Donner une construction du centre de courbure de L en A(t), c'est-à-dire du point $A(t) + R_t \vec{N}_t$, à partir de O, A(t) et B(t).

(P': III 5 :)

III.6.a) Donner les coordonnées de B(t) dans le repère R_t défini dans la question précédente, puis dans le repère R_0 ; donner également celles de $\frac{d\vec{B}}{dt}$. La courbe Λ décrite par B présente-t-elle des points singuliers ?

b) Déterminer le plan osculateur en B(t) à Λ, ainsi que la normale principale ; les caractériser connaissant O, A(t), B(t).

c) Soit M un point de D_t autre que B ; à quelle condition est-ce un point régulier de Σ ? Quel est alors le plan tangent en M à Σ ?

M seul

III.7. ρ désignant une constante réelle, on définit une courbe K_ρ tracée sur Σ de la façon suivante : à tout t compris strictement entre O et 2π, on associe le point $P(t) = A(t) + \rho \vec{w}(t)$, les notations étant celles définies en III.4.

a) Etablir que la vecteur $\vec{P}'(t)$ est constamment orthogonal à D_t. La courbe K_ρ a-t-elle des points singuliers ? S'il existe un tel point, le placer par rapport aux points A et B correspondants.

b) Montrer que K_ρ est tracée sur une sphère que l'on précisera.

c) Comment passe-t-on de K_0 (c'est-à-dire de la courbe L définie en III.5) à K_ρ ?

*** FIN ***

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail